2. Četri fundamentalna podprostora

(2.01) Podprostori i linearne funkcije

Za linearnu funkciju f koja preslikava $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$, neka $im(f)$ označava rang (ili sliku) funkcije f. Tj. $im(f) = \{f(\boldsymbol{x}) \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ je skup svih "slika" kad $\boldsymbol{x}$ uzima vrijednosti iz $\mathbb{R}^n$.

Rang svake linearne funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je podprostor od $\mathbb{R}^m$, i svaki podprostor od $\mathbb{R}^m$ je rang neke linearne funkcije.

Zbog ovog razloga, podprostor od $\mathbb{R}^m$ se nekad zovu *linearni prostori*. $\diamond$

(2.02) Rang prostor

Rang prostor matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ je, definisan kao, podprostor $im(A)$ od $\mathbb{R}^m$, koji je generisan pomoću ranga funkcije $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$. Tj.

$$im(A) = \{A\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Slično, rang od $A^\top$ je podprostor of $\mathbb{R}^n$ definisan sa

$$im(A^\top) = \{A^\top\boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Kako je $im(A)$ skup svih "slika" vektora $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ pod transformacijom A, nekad se u literaturi $im(A)$ zove *slika prostor* od A. $\diamond$

(2.03) Kolona i red prostor

Za $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, sljedeće tvrdnje su tačne.

(i) $im(A) =$ prostor generisan pomoću kolona matrice A (kolona prostor).

(ii) $im(A^\top) =$ postor generisan pomoću redova matrice A (red prostor).

(iii) $\boldsymbol{b} \in im(A) \Leftrightarrow \boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$ za neki $\boldsymbol{x}$.

(iv) $\boldsymbol{a} \in im(A^\top) \Leftrightarrow \boldsymbol{a}^\top = \boldsymbol{y}^\top A$ za neki $\boldsymbol{y}^\top$. $\diamond$

(2.04) Jednaki rang prostori

Za dvije matrice A i B istog oblika:

(i) $im(A^\top) = im(B^\top)$ ako i samo ako $A \overset{red}{\sim} B$.

(ii) $im(A) = im(B)$ ako i samo ako $A \overset{kol}{\sim} B$. $\diamond$

(2.05) Generatori za red prostor i rang prostor

Neka je A matrica oblika $m \times n$, i neka je U matrica u red ešelon obliku dobijena iz A. Generatori za red i kolona prostor su sljedeći:

(i) Nenula redovi od U generišu $im(A^\top)$.

(ii) Osnovne kolone u A generišu $im(A)$. $\diamond$

(2.06) Nulaprostor ili jezgro

(i) Za $m \times n$ matricu A, skup

$$ker(A) = \{\boldsymbol{x} \,|\, A\boldsymbol{x} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

zovemo *nulaprostor* ili *jezgro* matrice A. Drugim riječima, $ker(A)$ je jednostavno skup svih rješenja homogenog sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

(ii) Skup

$$ker(A^\top) = \{\boldsymbol{y} \,|\, A^\top\boldsymbol{y} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

zovemo *naulaprostor sa lijeve strane* matrice A, zato što je $ker(A^\top)$ skup svih riješenja lijevog homogenog sistema $\boldsymbol{y}^\top A = \boldsymbol{0}^\top$. $\diamond$

(2.07) Generator za nulaprostor

Da bi odredili generator skup za nulaprostor $ker(A)$, gdje je $rang(A_{m\times n}) = r$, pomoću red operacija reduciramo matricu A na red ešelon oblik U, i onda riješimo sistem $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Osnovne varijable ćemo napisati pomoću slobodnih varijabli i time kreirati opšte rješenje sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ u obliku

$$\boldsymbol{x} = x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + ... + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r}.$$

Prema definiciji skup $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, ..., \boldsymbol{h}_{n-r}\}$ generiše $ker(A)$. Štaviše, može se dokazati da je $\mathcal{H}$ jedinstven u smislu da je $\mathcal{H}$ nezavisan od oblika red ešelon matrice U.
(Opisana procedura je specijalni slučaj Kroneker-Kapelijeve metode za rješavanje sistema linearnih jednačina, koja je poznata iz Uvoda u linearnu algebru). ◇

(2.08) Nula nulaprostor

Ako je A $m \times n$ matrica, tada
(i) $ker(A) = \{\boldsymbol{0}\}$ ako i samo ako $rang(A) = n$;
(ii) $ker(A^\top) = \{\boldsymbol{0}\}$ ako i samo ako $rang(A) = m$;

◇

(2.09) Nulaprostor sa lijeve strane

Ako je $rang(A_{m\times n}) = r$, i ako $PA = U$, gdje je P nesingularna i U je u red ešelon obliku, tada najmanje $m - r$ redova u P generišu lijevi nulaprostor matrice A. Drugim riječima, ako je $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ gdje je matrica P_2 oblika $(m - r) \times m$, tada

$$ker(A^\top) = im(P_2^\top).$$

◇

(2.10) Jednakost nulaprostora

Za dvije matrice A i B istog oblika
(i) $ker(A) = ker(B)$ ako i samo ako $A \overset{red}{\sim} B$.
(ii) $ker(A^\top) = ker(B^\top)$ ako i samo ako $A \overset{kol}{\sim} B$.

◇

(2.11) Sažetak

Četri fundamentalna podprostora pridružena matrice A su sljedeća.

- Rang ili kolona prostor: $im(A) = \{A\boldsymbol{x}\} \subseteq \mathbb{R}^m$.
- Red prostor ili rang prostor sa lijeve strane: $im(A^\top) = \{A^\top\boldsymbol{y}\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Nulaprostor (ili jezgro): $ker(A) = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Nulaprostor sa lijeve strane: $ker(A^\top) = \{\boldsymbol{y} \mid A^\top\boldsymbol{y} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

Neka je P nesingularna matrica takva da je $PA = U$, gdje je U u red ešelon obliku, i pretpostavimo da je $rang(A) = r$.

- Generator skup za $im(A)$ = osnovne kolone u A.
- Generator za $im(A^\top)$ = nenula redovi u U.
- Generator za $ker(A)$ = vektori h_i u opštem rješenju sistema $A\boldsymbol{x} = 0$.
- Generator za $ker(A^\top)$ = najmanje $m - r$ redova iz P.

Ako su A i B istog oblika, tada

- $A \overset{red}{\sim} B \quad \Leftrightarrow \quad ker(A) = ker(B) \quad \Leftrightarrow \quad im(A^\top) = im(B^\top)$.
- $A \overset{kol}{\sim} B \quad \Leftrightarrow \quad im(A) = im(B) \quad \Leftrightarrow \quad ker(A^\top) = ker(B^\top)$. ◇

Data je matrica $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$. Pokazati da su sljedeće dvije tvrdnje tačne:

a) $im(A)$ = prostor generisan pomoću kolona matrice A (kolona prostor)

b) $im(A^T)$ = prostor generisan pomoću redova matrice A (red prostor)

Rj. Prema definiciji

$$im(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}, \quad im(A^T) = \{A^T y \mid y \in \mathbb{R}^m\}$$

a)
Neka su $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ kolone matrice A,

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A_{*1} & A_{*2} & \dots & A_{*n} \\ | & | & & | \end{bmatrix}. \text{ Tada}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A_{*1} & A_{*2} & \dots & A_{*n} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A_{*1}x_1 + A_{*2}x_2 + \dots + A_{*n}x_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i A_{*i} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kako je } x\in\mathbb{R}^n \text{ proizvoljan vektor}}}{=} span\{A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}\}$$ q.e.d.

b)
Slično nije teško pokazati da (ZA VJEŽBU)

$$im(A^T) = span\{A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}\} \text{ gdje su}$$

$A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ redovi matrice A, $A = \begin{bmatrix} — A_{1*} — \\ — A_{2*} — \\ \vdots \\ — A_{m*} — \end{bmatrix}$.

(#) Opisati $im(A)$ i $im(A^T)$ za matricu $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Rj.: Prema prethodnom zadatku

$$im(A) = span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \,\middle|\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Primjetimo da je $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ pa je

$$im(A) = span\{A_{*1}, A_{*2}, A_{*3}\} = \{\alpha_1 A_{*1} + 2\alpha_2 A_{*1} + 3\alpha_3 A_{*1}\} =$$

$$= span\left\{ \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R} \right\} = span\{A_{*1}\}$$

Slično

$$im(A^T) = span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \,\middle|\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \,\middle|\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (\alpha_1 + 2\alpha_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \,\middle|\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \beta \in \mathbb{R} \right\} = span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Odrediti da li sljedeći skupovi generišu isti podprostor

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

Rj: Iz elementarne teorije Linearne algebre znamo da za dvije matrice A i B istog oblika vrijedi

$$\underline{im(A^T) = im(B^T) \quad \text{akko} \quad A \overset{red}{\sim} B}$$

$$\underline{im(A) = im(B) \quad \text{akko} \quad A \overset{kol}{\sim} B}$$

gdje je $\overset{red}{\sim}$ oznaka za red ekvivalenciju, a $\overset{kol}{\sim}$ oznaka za kolona ekvivalenciju.

Ako kolone skupa $\mathcal{A}$ postavimo kao redove matrice A, a kolone skupa $\mathcal{B}$ postavimo kao redove matrice B imamo

$$span(\mathcal{A}) = im(A^T) \quad i \quad span(\mathcal{B}) = im(B^T) \quad \text{gdje}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Svedimo matrice A i B u reducirani red ešelon oblik.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{III_v + I_v\cdot(-3)}{\overset{II_v + I_v\cdot(-2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \underset{III_v : (-5)}{\overset{II_v : (-3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{III_v - II_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\overset{I_v + II_v\cdot(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_A$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{I_v \leftrightarrow II_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{I_v + II_v\cdot(-3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = E_B$$

Prema tome $span(\mathcal{A}) = span(\mathcal{B})$ zato što se nenula redovi u E_A i E_B poklapaju.

\# Odrediti generator skupove za $im(A)$ i $im(A^T)$ gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Rj: Iz osnovne teorije linearne algebre znamo da, ako je U bilo koja matrica u red ešelon obliku dobijena iz A tada

nenula redovi od U generišu $im(A^T)$

osnovne kolone u A generišu $im(A)$

Svedimo matricu A na red ešelon obliku U

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{III_v + I_v \cdot (-3)}{\overset{II_v + I_v \cdot (-2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \underset{III_v : (-5)}{\overset{II_v : (-3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{II_v - III_v}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{I_v - II_v \cdot 2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$im(A) = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$im(A^T) = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(#) Posmatrajmo linearni sistem jednačina $A_{m\times n}x=b$.

(a) Objasniti zašto je $Ax=b$ saglasan sistem ako i samo ako $b\in im(A)$.

(b) Objasniti zašto saglasan sistem $Ax=b$ ima jedinstveno rješenje ako i samo ako $ker(A)=\{0\}$.

Rj.

$$Ax=b \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \iff \begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{matrix}$$

a) $im(A):=\{Ax \mid x\in\mathbb{R}^n\}=\{$ prostor generisan pomoću kolona matrice $A\}$

$b\in im(A) \iff \exists x\in\mathbb{R}^n$ t.d. $Ax=b \iff Ax=b$ je saglasan sistem
(sistem ima bar jedno rješenje)

b) $ker(A):=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=0\}$

$ker(A)=\{0\} \iff$ jedino rješenje sistema $Ax=0$ je trivijalno rješenje $x=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$

$\iff$ rang $A=n$ $\iff$ rang $A=$ rang $\bar{A}=n$ $\iff$

$\iff$ $Ax=b$ ima jedinstveno rješenje

(gdje je $\bar{A}=[A \mid b]$ proširena matrica)

(#) Pretpostavimo da je A 3×3 matrica tava da skupovi

$$\mathcal{R}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\} \quad i \quad \mathcal{N}=\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

generišu $im(A)$ i $ker(A)$, redom, i posmatrajmo linearni sistem $Ax=b$, gdje je $b=\begin{pmatrix}1\\-7\\0\end{pmatrix}$.

(a) Objasniti zašto $Ax=b$ mora biti saglasan sistem.

(b) Objasniti zašto $Ax=b$ ne može imati jedinstveno rješenje.

Rj. $im(A):=\{Ax \mid x\in\mathbb{R}^3\}=\{$prostor generisan pomoću kolona od $A\}$

a) $$im(A) \overset{\text{prema postavci zadatka}}{=} span(\mathcal{R})=\left\{\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\right\}$$

$Ax=b$ je saglasan sistem $\Leftrightarrow$ $\exists x\in\mathbb{R}^3$ t.d. $b=Ax$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $b\in im(A)$ $\Leftrightarrow$ $b\in span(\mathcal{R})$

Provjerimo da li $b\in span(\mathcal{R})$?

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2&=1 &\ldots(1)\\ 2\alpha_1-\alpha_2&=-7 &\ldots(2)\\ 3\alpha_1+2\alpha_2&=0 &\ldots(3)\end{aligned}$$

(1)+(2): $3\alpha_1=-6$

$\alpha_1=-2$

(3): $-6+2\alpha_2=0$

$\alpha_2=3$

Prema tome $b=(-2)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow b\in span(\mathcal{R})$

Prema tome $Ax=b$ mora biti saglasan sistem.

b) Ako bi $Ax=b$ imao jedinstveno rješenje to bi značilo da $rang(A)=n \Leftrightarrow ker(A)=\{0\}$

kontradikcija

(prema postavci zadatka $ker(A)=span(\mathcal{N})$

tj. $ker(A)=span\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\neq\{0\}$).

$ker(A):=\{x \mid Ax=0\}$.

(#) Ako je

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad i \quad b=\begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -6 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

da li je $b \in im(A)$?

Rj. $im(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^5\}$

Pitanje da li je $b \in im(A)$ se može postaviti u drugom obliku:
Da li postoji $x \in \mathbb{R}^5$ takvo da $Ax=b$? ili u obliku:
Da li je sistem $Ax=b$ saglasan?

$$\bar{A}=[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 & -6 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 & -7 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 & -7 \end{array}\right] \underset{I_k \leftrightarrow II_k}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & -6 & 4 & -7 \\ 0 & -1 & 3 & -6 & 4 & -7 \end{array}\right] \underset{\substack{III_v - II_v \\ IV_v - II_v \\ V_v - II_v}}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\substack{IV_v + III_v \cdot (-2) \\ V_v + III_v \cdot (-2)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow rang(A) = rang(\bar{A}).$$

Sistem je saglasan. b pripada $im(A)$.

(#) Pretpostavimo da je A $n\times n$ matrica.

(a) Ako je $im(A)=\mathbb{R}^n$, objasniti zašto A mora biti nesingularna?

(b) Ako je A nesingularna, opisati njegova četiri fundamentalna podprostora

Rj.

a) $im(A)=\{Ax \mid x\in\mathbb{R}^n\}=\{$ prostor generisan pomoću kolona matrice $A\}$

$im(A)=\mathbb{R}^n \Rightarrow \forall b\in\mathbb{R}^n\ \exists x\in\mathbb{R}^n$ t.d. $Ax=b$

$$\mathbb{R}^n = \text{span}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}}_{\in\mathbb{R}^n}, \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}}_{\in\mathbb{R}^n}, \dots, \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}}_{\in\mathbb{R}^n}\right\}$$

$im(A)=im(I_n) \Rightarrow A \overset{kol}{\sim} I_n \Rightarrow rang(A)=rang(I_n)=n$

$\Rightarrow$ A je nesingularna matrica

b) $\underline{A \text{ nesingularna} \Leftrightarrow \text{sistem } Ax=b \text{ ima jedinstveno rješenje za } \forall b\in\mathbb{R}^n \Leftrightarrow rang(A)=n}$

$im(A):=\{Ax \mid x\in\mathbb{R}^n\}$ $\qquad$ $im(A^T):=\{A^Tx \mid x\in\mathbb{R}^n\}$

$ker(A):=\{x \mid Ax=0\}$ $\qquad$ $ker(A^T):=\{y \mid A^Ty=0\}$

$ker(A)=ker(A^T)=\{0\}$

$im(A)=im(A^T)=\mathbb{R}^n$ $\qquad$ zašto?

Posmatrajmo matrice $A=\begin{bmatrix}1&1&5\\2&0&6\\1&2&7\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1&-4&4\\4&-8&6\\0&-4&5\end{bmatrix}$.

(a) Da li A i B imaju isti red prostor?

(b) Da li A i B imaju isti kolona prostor?

(c) Da li A i B imaju isto jezgro?

(d) Da li A i B imaju isti nulaprostor sa lijeve strane? (jezgro sa lijeve strane).

Rj.:

Red prostor je prostor generisan pomoću redova matrice A, i on je u stvari $im(A^T)$.

Kolona prostor je prostor generisan pomoću kolona matrice A, i on je u stvari $im(A)$.

$$im(A^T)=im(B^T) \iff A \overset{red}{\sim} B$$

$$im(A)=im(B) \iff A \overset{kol}{\sim} B$$

$ker(A)=\{x \mid Ax=0\}$ jezgro matrice A.

$ker(A^T)=\{y \mid A^Ty=0\}$ jezgro sa lijeve strane.

$$ker(A)=ker(B) \iff A \overset{red}{\sim} B$$

$$ker(A^T)=ker(B^T) \iff A \overset{kol}{\sim} B$$

objasniti zašto?

$$A=\begin{bmatrix}1&1&5\\2&0&6\\1&2&7\end{bmatrix} \underset{III_v-I_v}{\overset{II_v+I_v(-2)}{\sim}} \begin{bmatrix}1&1&5\\0&-2&-4\\0&1&2\end{bmatrix} \overset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \begin{bmatrix}1&1&5\\0&1&2\\0&-2&-4\end{bmatrix} \overset{III_v+II_v\cdot 2}{\sim} \begin{bmatrix}1&1&5\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix} \overset{I_v+II_v\cdot(-1)}{\sim}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}=E_A,$$

$$B=\begin{bmatrix}1&-4&4\\4&-8&6\\0&-4&5\end{bmatrix} \overset{II_v-I_v\cdot 4}{\sim} \begin{bmatrix}1&-4&4\\0&8&-10\\0&-4&5\end{bmatrix} \overset{II_v:2}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1&-4&4\\0&4&-5\\0&-4&5\end{bmatrix} \overset{III_v+II_v}{\sim} \begin{bmatrix}1&-4&4\\0&4&-5\\0&0&0\end{bmatrix} \overset{I_v+II_v}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&4&-5\\0&0&0\end{bmatrix}=E_B$$

Kako je $E_A \neq E_B$ znači da $\mathrm{im}(A^T) \neq \mathrm{im}(B^T)$
i da je $\ker(A) \neq \ker(B)$.

E_A je reducirani red ečelon oblik matrice A
E_B je reducirani red ečelon oblik matrice B

Za vježbu pokazati da je $E_{A^T} = E_{B^T}$ što povlači da je

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{im}(B) \quad \text{i} \quad \ker(A^T) = \ker(B^T).$$

(#) Odrediti generator skup za $\ker(A)$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Rj. $\ker(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \}$

$\ker(A)$ je u stvari opšte rješenje sistema $Ax = 0$.
Riješimo sistem $Ax=0$ Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\bar{A} = [A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right] \overset{II_v + I_v \cdot (-2)}{\sim} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \text{rang}(A) = \text{ran}(\bar{A}) = 1 < 3 \quad \Rightarrow$ sistem ima ∞ mnogo rješenja. Dvije promjenjive uzimamo proizvoljno.

$$\boxed{Ax = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

$x_2 = s$
$x_3 = t$ $\Rightarrow$ $x_1 = -2x_2 - 3x_3 = -2s - 3t$

Rješenje sistema je $(-2s-3t, s, t)$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prema tome

$$\ker(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Geometrijski ovo predstavlja ravan koja prolazi kroz koordinatni početak i sadrži tačke $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(#) Neka je data matrica $A_{m\times n}$. Pokazati da vrijedi sljedeća tvrdnja:

$$\ker(A)=\{\mathbf{0}\} \quad \text{ako i samo ako} \quad \text{rang}(A)=n.$$

Rj.

„$\Rightarrow$" Pretpostavimo da je $\ker(A)=\{0\}$. Prema definiciji

$$\ker(A)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=0\}$$

Ovo znači da je jedino rješenje homogenog sistema $Ax=\mathbf{0}$ trivijalno rješenje $x=\mathbf{0}$.

Isto tako, znamo da sistem $Ax=0$ ima jedinstveno rješenje akko $\text{rang}(A)=\text{rang}(\bar{A})=\text{broj nepoznatih}$.

Kako je broj nepoznatih n imamo

$$\text{rang}(A)=n$$

q.e.d.

„$\Leftarrow$" Pretpostavimo da je $\text{rang}(A)=n$, i posmatrajmo sistem $Ax=\mathbf{0}$. Ovaj sistem ima jedinstveno rješenje akko $\text{rang}(A)=\text{rang}(\bar{A})=\text{broj nepoznatih}$. Kako je $\text{rang}(\bar{A})\geq\text{rang}(A)$ za svaku matricu A imamo da je

$$\text{rang}(A)=\text{rang}(\bar{A})=n.$$

Jedino rješenje sistema $Ax=0$ je trivijalno rješenje iz čega slijedi

$$\ker(A)=\{\mathbf{0}\}$$

q.e.d.

Odrediti generator skup za $\ker(A^T)$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rj. Iz osnovne teorije Linearne algebre znamo da, ako je $\operatorname{rang}(A_{m\times n}) = r$, i ako je $PA = U$, gdje je P nesingularna matrica oblika $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$, gdje je U matrica u red ešelon obliku i gdje je P_2 oblika $(m-r)\times m$ tada

$$\underline{\ker(A^T) = \operatorname{im}(P_2^T)}$$

Da bi odredili nesingularnu matricu P takvu da $PA = U$, gdje je U u red ešelon obliku, primjenjićemo sljedeću proceduru: osnovnim red operacijama matricu $[A|I]$ ćemo svesti na $[U|P]$.

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{III_v + I_v\cdot(-3)}{\overset{II_v + I_v\cdot(-2)}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{III_v:(-5)}{\overset{II_v:(-3)}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \overset{II_v + I_v\cdot(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/15 & 1/3 & -1/5 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\ \frac{3\cdot 3}{5\cdot 3} - \frac{2\cdot 5}{3\cdot 5} = \frac{9-10}{15} = -\frac{1}{15}\ \right]$$

$$\overset{III_v\cdot(-5)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -5/3 & 1 \end{array}\right]$$

Prema tome

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 1/3 & -5/3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \ker(A^T) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

(ova stranica je ostavljena prazna)